УДК 517.9+528.21+550.831
А.В. ЧОРНИЙ, д-р фіз.-мат. наук, ін-т геофізики НАН України

ПРО НОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

Розглядається задача відновлення потенціалу притягання за значеннями модуля градієнта потенціалу сили тяжіння. Її розв'язок подається у вигляді послідовності розв'язання зовнішніх граничних задач Неймана для рівняння Лапласа. Доведена збіжність послідовності до розв'язку, що розшукується, за умови, що він не дуже відхиляється від заданого.

Для розв'язання важливих теоретичних і прикладних задач різних наук про Землю, що виникають при вивченні її фігури, внутрішньої будови, глибинних геофізичних процесів тощо, а також задач, пов'язаних із рухом штучних апаратів у навколоземному просторі, потрібно знати розподіл значень потенціалу сили тяжіння, значень градієнта цього потенціалу чи значень модуля цього градієнта. Такий розподіл можна одержати на основі даних спостережень якої-небудь характеристики поля і фундаментальних властивостей функцій, що описують гравітаційну взаємодію.

У цей час на поверхні Землі вимірюються в масовій кількості значення сили тяжіння, які являють собою значення модуля градієнта гравітаційного потенціалу. Однак до цієї пори ще не створена теорія відновлення потенціалу за значенням його градієнта, У статті розробляється один із можливих способів розв'язання цієї задачі, який реалізується за умови, що відновлюваний потенціал не дуже відхиляється від заданого.

Вступ до теорії задачі відновлення потенціалу за модулем його градієнта розпочнемо з описання предметної її моделі та зв'язаних із нею понять. За предметну виберемо щонайпростішу модель Землі як абсолютно тверде тіло, за формою близьке до тіла обертання, що рухається рівномірно вздовж своєї орбіти і обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю (без прецесії і нутації). Позначимо через y^- обмежену область точок тривимірного евклідового стору, яка зайнята масами Землі (за винятком мас її нерухомої газової оболонки), через y^+ – необмежене доповнення цієї області, вільне від будь-яких гравітуючих об'єктів, а через ∂y – границю між множинами y^- і y^+, що ототожнюється з фізичною поверхнею Землі. Міри кожної з підмножин певної з областей y^- чи y^+ відповідно до наданої моделі залишаються весь час незмінними.

Введемо прямокутну декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у центрі Землі, осі Ox_1 і Ox_2 розташуємо довільно в екваторіальній її площині, а вісь Ox_3 спрямуємо за віссю її обертання. Для розпізнавання точок області y^- та її доповнення y^+ перші будемо позначати грецькими, а другі – латинськими літерами, наприклад, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in y^-$ і $x=(x_1,x_2,x_3)\in y^+$. Елемент об'єму замість $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ позначатимемо символом $d\xi$, а евклідову віддаль між точками x і ξ – у вигляді $|x-\xi|$. Маси Землі $M(\xi)$ $\xi\in y^-$ генерують у всьому просторі поле сили тяжіння, потенціал якого (при умові, що маси мають щільність $dM(\xi)=\sigma(\xi)d\xi$), приймає вигляд

$$W(x)= f\int\limits_{y^-}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|}d\xi+\begin{cases}\Omega(x), & x\in y^-\\ 0, & x\in y^+\end{cases} \tag{1}$$

де f – гравітаційна стала, $\Omega(x)=0.5\omega^2(x_1+x_2)$ – потенціал ценробіжної сили, ω – модуль вектора кутової швидкості Землі. Величина напруги поля або значення модуля градієнта потенціалу визначається так:

$$g(x)=|-\nabla W(x)|=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial W(x)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k(x)}{\partial n}=\langle\bar g(x),\bar n(x)\rangle \tag{2}$$

де $\dfrac{\partial x_k(x)}{\partial n}=\cos(n,x_k),\ k=1,2,3$ – напрямні косинуси одиничного вектора $\bar n(x)$ внутрішньої нормалі до еквіпотенціальної поверхні $dW(x): W(y)=Cx,\ Cx=const$, яка проходить через точку x, $\langle\bar g(x),\bar n(x)\rangle$ – скалярний добуток векторів $\bar g(x)$ і $\bar n(x)$.

Зазначимо одну з важливіших характеристик модуля градієнта потенціалу, яка випливає з подання (2) і грунтується на наступному твердженні.

Лема. Добуток двох функцій $u(x)$ і $v(x)$, $x\in D$ класу $C^{(2}(D)$ буде гармонійною в області D функцією $w(x)=u(x)\cdot v(x)$ тоді і лише тоді, коли кожний із співмножників буде гармонійним в D, а їх градієнти $\nabla u(x)$ і $\nabla v(x)$ будуть ортогональними один до одного в області D.

Доведення випливає негайно із рівності

$$\nabla^2 w(x)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial W(x)}{\partial x_k^2}=v(x)\cdot\nabla^2 u(x)+2\langle\nabla u(x),\ \nabla v(x)\rangle+u(x)\cdot\nabla^2 v(x)$$

Наслідок. Модудь градієнта потенціалу (сили тяжіння) не задовольняє рівнянню Лапласа в жодній точці області y^+.

Насправді, хоч кожна із складових градієнта $u(x)=\dfrac{\partial W(x)}{\partial x_k}$ є гармонійною функцією, функції $v(x)=\cos(n,x_k),\ k=1,2,3$ такими не є. У цьому легко переконатися безпосередньо.

Якби на поверхні Землі (рівняння якої вважаємо заданим), крім значень модуля градієнта потенціалу $g(x),\ x\in\partial y$ і внутрішньої нормалі $\overline{m}(x)$ до ∂y, вимірювався також напрямок градієнта $\overline{n}(x)$, то задачу відновлення потенціалу сили тяжіння можна було б звести до визначення потенціалу притягання $V(x),\ x\in y^+$ у вигляді розв'язку зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\nabla^2 V(x)=0,\ x\in y^+,\ \frac{\partial V(x)}{\partial m}=\Phi(x),\ x\in\partial y,\ V(x)\to 0,\ |x|\to\infty \tag{3}$$

де $\Phi(x)=\dfrac{\partial W(x)}{\partial m}-\dfrac{\partial\Omega(x)}{\partial m}=g(x)\cos^2(n,m)-\omega^2\sum\limits_{k=1}^{3}c,\ \ \cos(n,m)=\omega^2\sum\limits_{k=1}^{3}\cos(n,x_k)\cos(x_k,m).$

Проте напрямок нормалі $\overline{n}(x)$ нам невідомий через виключну складність і високу вартість вимірювань, і від наведеного способу розв'язання задачі залишаються лише деякі міркування щодо побудови певного ітераційного процесу. Перш ніж заглиблюватися в його деталі, охарактеризуємо коротко стан справ із граничними даними задачі відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта $q(x)=|-\nabla V(x)|$. У рамках прийнятої моделі ці значення описуються, як неважко бачити, наступним виразом:

$$q^2(x)=q^2(x)\left\{1-2q^{-1}(x)\sum_{k=1}^{2}\cos(n,x_k)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}+q^{-2}(x)\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right)^2\right\},$$

або $$q_i(x)=q_{i-1}(x)\left\{\sum_{k=1}^{2}\left[\cos(n,x_k)-q^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right]^2\right\}, \tag{4}$$

так як $\dfrac{\partial\Omega(x)}{\partial x_3}=0$.

Подамо потенціал притягання у вигляді суми $V(x)=U(x)+T(x)$ нормального $U(x)$ і збурюючого $T(x)$ потенціалів. Нормальним будемо вважати потенціал, що генерується певними фіктивними масами, які дорівнюють масам в y^-, але на відміну від останніх розташовані в якомусь розумінні "правильно" (чи "нормально") в деякій іншій області y_0 з достатньо простою геометрією і з границею ∂y_0, яка не дуже відхиляється від земної поверхні ∂y. У зв'язку з цим визначенням збурюючий потенціал буде характеризувати відхилення реального розподілу мас в y^- від прийнятого нормального. Позначимо через $\vec{v}(x)$ одиничну (внутрішню) нормаль до поверхні $\partial U_x : U(y)=C_x$, а через $\gamma(x)=|-\nabla U(x)|$ – модуль градієнта нормального потенціалу. Будемо вважати заданими напрямні косинуси $\cos(\nu,x_k)$ і $\cos(x_k,m)$ внутрішніх нормалей $\vec{v}(x)$ та $\overline{m}(x)$ відповідно до поверхонь ∂U_x і ∂y, а разом з ними і $\cos(\nu,m)=\sum\limits_{k=1}^{3}\cos(\nu,x_k)\cos(x_k,m)$

Тоді відновлення потенціалу притягання $V(x),\ x\in y^+$ можна визначити на основі граничної задачі (3) у вигляді обчислення послідовних наближень $V^{(k)}(x),\ k=0,1,2,\ldots,\infty$. Таким чином, за визначеними на попередньому *i*-му кроці наближеннями $\cos(n_i,x_k),\ k=1,2,3$ напрямних косинусів нормалі $\overline{n}(x)$ визначимо на границі ∂y відповідно до формули (4) наступне $i+1$-ше наближення сили притягання

$$q_{i+1}^2(x)=g(x)\left(\sum_{k=1}^{2}\left[\cos(n_i,x_k)-q_i^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right]\right)^{-1/2},\ x\in\partial y$$

і значення функцій $\cos(n_i,m)=\sum\limits_{k=1}^{3}\cos(n_i,x_k)\cos(x_k,m),\ x\in\partial y$,

$$\Phi_{i+1}(x) = q_{i+1}(x)\cos(n_i, m) = \gamma(x)\cos(\nu, m),\ x \in \partial y$$

Далі розв’язуємо зовнішню задачу Неймана для рівняння Лапласа.

$$\Delta T_{i+1}(x) = 0,\ x \in y^+,\ \ \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial m} = \Phi_{i+1}(x),\ x \in \partial y,\ T_{i+1}(x) \to 0,\ |x| \to \infty. \quad (5)$$

Її розв'язок будемо шукати у вигляді потенціалу простого шару мас, розподілених на поверхні ∂y з неперервною щільністю $\delta_{i+1}(x),\ x \in \partial y$,

$$T_{i+1}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{\delta_{i+1}(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi,\ x \in y^+. \quad (6)$$

Невідому щільність визначимо за граничною умовою, яка за відомою *теоремою стрибка* приводить до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду:

$$\delta_{i+1}(x) + \int_{\partial y} K(x,\xi)\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi = 2\Phi_{i+1}(x),\ x \in \partial y, \quad (7)$$

де ядро $K(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial m_x}\frac{1}{|x-\xi|} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(u,m)}{|x-\xi|}$, а $\cos(u,m),\ u = x - \xi$ визначається за формулою

$$\cos(u,m) = \sum_{k=1}^{3}\cos(m, x_i)\frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|}.$$

У результаті розв’язку рівняння (7) обчислюємо з використанням співвідношення (6) наближення похідних потенціалу притягання

$$V_j^{(i+1)}(x) = \frac{\partial V^{(i+1)}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j},\ \ \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j} = -\frac{1}{4\pi}\frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|^3}\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi,\ j = 1,2,3 \quad (8)$$

Із зовнішнього вигляду виразів (8) помічаємо, що похідні наближень збурювального потенціалу визначаються тільки у внутрішніх точні області y^+. У точках же її границі ∂y значення похідних у поданому вигляді визначити неможливо через наявність у підінтегральних функціях досить сильних, неінтегрованих особливостей. А між іншим, для продовження обчислень потрібно мати значення похідних збурювального потенціалу саме у точках границі ∂y. Щоб їх знайти, слід передбачити спеціальну регуляризацію інтегралів (8). Маючи на увазі, що така операція вже виконана і значення похідних (8) знайдені в точках $x \in \partial y$, продовжимо обчислення наступних наближень

$$\cos(n_{i+1}, x_k) = q_{i+1}^{-1}(x)V_k^{(i+1)}(x),\ x \in \partial y,\ \ q_{i+2}^2(x) = g(x)\left\{\sum_{k=1}^{3}\left[\cos(n_{i+1}, x_k) - q_{i+1}^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x}\right]^2\right\}^{-1/2},\ x \in \partial y,$$

$$\Phi_{i+2}(x) = q_{i+2}(x)\cos(n_{i+1}, m) = \gamma(x)\cos(\nu, m),\ x \in \partial y$$

Визначивши ці наближення, знову перейдемо до розв’язку граничної задачі (5)-(7) зі зміною індексу $i+1$-го наближення збурюючого потенціалу $T_{i+1}(x)$ і наближення $V^{(i+1)}(x) = U(x) + T_{i+2}(x)$ потенціалу притягання і т.д.

Запропонована схема відновлення потенціалу притягання потребує точного обгрунтування. Необхідно навести переконливі міркування не тільки щодо розв’язку граничної задачі (6)-(7), якою замінена коректна у математичному плані задача (5), але й довести збіжність самих наближень $V^{(k)}(x)$ до потенціалу притягання $V(x),\ x \in y^+$, а також вказати метод обчислення похідних від наближень збурювального потенціалу у замкненій області y^+.

Перш ніж перейти до дослідження окресленого кола питань, відмітимо, що теореми однозначного розв’язку задачі Неймана для рівняння Лапласа за допомогою потенціалу простого шару, встановлені на початку століття, за модулем його градієнта зводяться головним чином до доведення збіжності обчислюваних наближень $V^{(k)}(x),\ k = 0,1,2,...,\infty$ функції $V(x),\ x \in y^+$.

Збіжність, наближень $V^{(k)}(x)$ буде доведена, якщо пощастить виявити у свою чергу збіжність послідовності $\{T_k(x)\}$ наближень збурюючого потенціалу. Дійсно, якщо буде показано, що $T_k(x)$ збігається до $T(x)$ при $k \to \infty$, то звідси випливатиме не тільки збіжність $V^{(k)}(x)$ до $V(x),\ x \in y^+$, але і збіжність до своїх границь будь-яких інших наближень, що однозначно визначаються за $T_k(x)$. Позначимо відношення $\varepsilon^2(x) = \frac{|\nabla T(x)|^2}{|\nabla U(x)|^2}$. У такому разі буде справедливою наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $\varepsilon^2(x)$ – квадрат відношення модуля градієнта збурювального потенціалу до модуля градієнта нормального потенціалу – настільки мала величина порівняно з $\varepsilon(x)$, що нею можна знехтувати, то послідовність розв'язків $\{T_k(x)\}$ граничних задач (5) збігається до збурювального потенціалу $T(x)$ області y^-.

Для доведення теореми досить показати, що збігається послідовність $\{\delta_k(x)\}$, тому що збіжність останньої, як це видно з подання (6), спричиняє збіжність послідовності $\{T_k(x)\}$. А щоб установити збіжність послідовності $\{\delta_i(x)\}$, відмітимо, що оператор $A\delta_i = \delta_i(x) + \int\limits_{\partial y} K(x,\xi)\delta_i(\xi)dS_\xi$ рівняння (7) відповідно до теореми існування розв'язку має обмежений обернений оператор A^{-1}. Нехай $\left\|A^{-1}\right\| \le c < \infty$|. Виходячи з цього твердження, запишемо очевидну нерівність $\left\|\delta_{i+1}(x) - \delta_i(x)\right\| \le 2c\left\|\Phi_{i+1}(x) - \Phi_i(x)\right\|$, яка з урахуванням визначення функцій $\Phi_i(x)$ може бути подана у вигляді

$$\left\|\delta_{i+1}(x) - \delta_i(x)\right\| \le 2c\left\|q_{i+1}(x)\right\|\left\|\cos(n_i,m) - \cos(n_{i-1},m)\right\| + 2c\left\|\cos(n_{i-1},m)\right\|\left\|q_{i+1}(x) - q_i(x)\right\|.$$

Покажімо, що першим доданком у правій частині нерівності можна знехтувати. У зв'язку з цим відмітимо, перш за все, рівність

$$q_i^2(x) = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial x_k}\right)^2 = \gamma^2(x) + 2\gamma(x)\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu} + \left|\nabla T_{i-1}(x)\right|^2.$$

Якщо тепер вираз для градієнта функції $T_{i-1}(x)$ переписати з урахуванням очевидного співвідношення $\dfrac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu} = q_i(x)\cos(n_{i-1},\nu) - \gamma(x)$, то прийдемо до наступної залежності

$$q_i^2(x) = \left(\gamma(x) + \frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu}\right)^2 - q_i^2(x)\sin^2(n_i,\nu).$$

У той же час із виразу $\cos(n_{i-1},\nu) = \sum_{k=1}^{3}\cos(n_{i-1},x_k)\cos(x_k\nu) = 1 - \gamma^{-2}(x)\left[\dfrac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu}\right]^2$ видно, що кут $\cos(n_{i-1},\nu)$ при виконанні умови теореми досить малий. Тому попереднє співвідношення з точністю до $\varepsilon^2(x)$ можна записати у вигляді

$$q_i^2(x) = \gamma(x)\left(1 + \gamma^{-1}(x)\left[\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu}\right]^2\right) \tag{9}$$

Тепер легко показати, що різниця $\cos(n_i,m) - \cos(n_{i-1},m)$ має порядок величини $\varepsilon^2(x)$. Насправді, оскільки за визначенням і з урахуванням наближеної рівності (9) маємо

$$\cos(n_i,m) = q_i^2(x)\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial x_k}\right)\cos(x_k,m) = \cos(\nu,m) = \left\{1 - \gamma^{-2}(x)\left[\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu}\right]^2\right\}, \tag{10}$$

то, очевидно, згадана різниця за порядком не перевершує числа $\varepsilon^2(x)$. Далі, на основі подання (9) і з урахуванням граничної умови задачі (5) можна записати

$$q_{i+1}(x) - q_i(x) = \cos(\nu,m)\left[q_i(x)\cos(n_{i-1},m) - q_{i-1}(x)\cos(n_{i-2},m)\right].$$

З цього, якщо взяти до уваги умову теореми і рівність (10), одержуємо наступний ланцюжок нерівностей

$$\left\|q_{i+1}(x) - q_i(x)\right\| \le \left\|\cos(\nu,m)\right\|^2\left\|q_i(x) - q_{i-1}(x)\right\| \le$$
$$\le \left\|\cos(\nu,m)\right\|^4\left\|q_{i-1}(x) - q_{i-2}(x)\right\| \le \ldots \le \left\|\cos(\nu,m)\right\|^{2i}\left\|q_1(x) - q_0(x)\right\|.$$

Так, остаточно маємо нерівність $\left\|\delta_{i+1}(x) - \delta_i(x)\right\| \le 2c\left\|\cos(\nu,m)\right\|^{2i+1}\left\|q_1(x) - q_0(x)\right\|$, на основі якої переконуємося, що послідовність $\{\delta_k(x)\}$ швидко збігається у собі, якщо $\left\|\cos(\nu,m)\right\| < 1$. У той же час, коли $\left\|\cos(\nu,m)\right\| = 1$, тобто, коли напрямок внутрішньої нормалі $\nu(x)$ до еквіпотенціальної поверхні ∂U_x збігається (або йому протилежний) з напрямком нормалі $\overline{m}(x)$ до поверхні Землі ∂y, тоді, очевидно, наша задача зводиться до добре вивченої *зовнішньої* задачі Неймана для рівняння Лапласа і може бути розв'язана за класичною процедурою. Виключаємо цей випадок із розгляду (як нецікавий і нереальний в даній ситуації)

і, вертаючись до послідовності $\{\delta_k(x)\}$, відмітимо, що із збіжності у собі елементарно встановлюється збіжність до єдиної границі $\delta(x)$ і тим завершуємо доведення.■

Проблема поширення формул (8), справедливих для внутрішніх точок області y^+, на граничні точки $x \in \partial y$ знімається наступним твердженням.

Теорема 2. Якщо щільність потенціалу простого шару (6) є неперервна на ∂y функція, то граничні значення частинних похідних першого порядку від потенціалу визначаються у вигляді

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial y} \frac{x_k - \xi_k}{|x-\xi|}\delta(\xi) dS_\xi + \frac{1}{2}\delta(x)\cos(x_k, m_x)$$

Доведення теореми елементарне і випливає негайно з подання потенціалу у вигляді

$$T(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}[\delta(\xi) - \delta(x)]\frac{dS_\xi}{|x-\xi|} + \frac{\delta(x)}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{dS_\xi}{|x-\xi|},$$

якщо диференціювання по x_k тимчасово замінити диференціюванням по внутрішній нормалі m_x до поверхні ∂y у точці x_i і прийняти до уваги відому тотожність

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial}{\partial m_x}\frac{1}{|x-\xi|}dS_\xi = \begin{cases} 1, & x \in y \\ 0.5, & x \in y^+ \\ 0, & x \in y^- \end{cases}.$$

Зауваження. Наведена формула визначення похідної погано пристосована для цієї мети через складність земного рельєфу. Тому її слід із самого початку замінити еквівалентною формулою

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}[\delta(\xi) - \delta(x)]\frac{x_k - \xi_k}{|x-\xi|}dS_\xi + \frac{1}{2}\delta(x)\cos(x_k, m_x).$$

Індекси, якими у виразах (8) описано послідовність граничних задач, у обчисленні похідних опущені, як несуттєві у даному розгляді.

1. *Чорний А.В.* Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісник Київського університету. Сер. Геологія. – 1995. – Вип. 13. – С. 72-80.

Надійшла до редколегії 15.04.94